三角代换专题（多动点抽象直线｜压轴解几专题）

近几年考试中，一些很难的的解析几何定点定值问题，用一二次定义点确实可以分析清楚，但是计算却是异常复杂，尤其是曲线上有三到四个动点以及多直线情况时，最后的生成点与生成直线无论是表示还是计算都难以处理，这是由于曲线中多变量复杂性带来的必然结果，比如有 3 个未知直线时（或 3 个未知点），需设为 $l_1: y=k_1x+b_1, l_2: y=k_2x+b_2, l_3: y=k_3x+b_3$,此时有着 6 个变量，极难处理与化简

但是这种情况下运用三角代换，可以将变量减少为 3 个（即 t_1、t_2、t_3），三条直线用 t_1、t_2、t_3 即可直接表示，极大减少了计算量与思维难度，这就是三角代换的优势所在

椭圆的三角代换

椭圆的三角代换由$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta. \end{cases}$设椭圆上一点$M(a\cos\theta, b\sin\theta)$，且 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$，

$$\text{则}\begin{cases} x=a\cos\theta=a\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=a\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=b\sin\theta=b\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=b\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=b\dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

若M,N为椭圆上的两点，则$k_{MN}=\dfrac{b\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}-b\dfrac{2t_2}{1+t_2^2}}{a\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2}-a\dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2}}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{t_1t_2-1}{t_1+t_2}$

过两点 $M\left(a\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, b\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}\right), N\left(a\dfrac{1-t_2^2}{1+t_2^2}, b\dfrac{2t_2}{1+t_2^2}\right)$

的直线方程可表示为$ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1)$

双曲线的三角代换

由$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta}, \\ y=b\tan\theta. \end{cases}$　设双曲线上一点$M\left(\dfrac{a}{\cos\theta}, b\tan\theta\right)$，

$$\text{则}\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta}=a\cdot\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=a\cdot\dfrac{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=a\cdot\dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \\ y=b\tan\theta=2b\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=b\cdot\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=b\cdot\dfrac{2t}{1-t^2}. \end{cases}$$

设$A\left(\dfrac{a(1+t_1^2)}{1-t_1^2}, \dfrac{2bt_1}{1-t_1^2}\right), B\left(\dfrac{a(1+t_2^2)}{1-t_2^2}, \dfrac{2bt_2}{1-t_2^2}\right)$，

则AB的直线方程为$a(t_1+t_2)y-b(t_1t_2+1)x=ab(t_1t_2-1)$

抛物线的三角代换

由$y^2=2px \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2p}{\tan^2\theta}, \\ y=\dfrac{2p}{\tan\theta} \end{cases}$，令$t=\dfrac{1}{\tan\theta}$，则抛物线上一点$A(2pt^2, 2pt)$

1．（2026 广东佛山一模）已知点 $A(2,3),B(2,1)$，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=x$，直线 AB 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

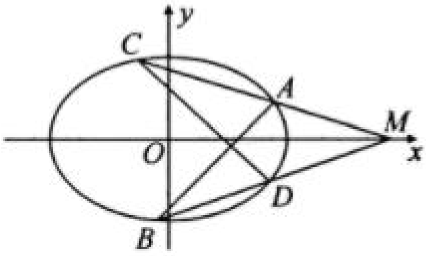
(1)求 C 的方程.

(2)已知 P,Q 是 C 的右支上不同的两点，且存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$.

（i）若点 D 满足 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DQ}$，求证：点 D 总在某定直线上；

（ii）若直线 PB 与 C 的另一个交点为 R（异于 Q），求证：直线 QR 过定点，并求出该定点的坐标.

2．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，斜率为 1 的直线 l 与椭圆交于 A，B 两点，点 $M\left(4,0\right)$，直线 AM 与椭圆 E 交于点 C，直线 BM 与椭圆 E 交于点 D，求证：直线 CD 恒过定点.



3. （2026 惠州二调）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点 $A\left(2,3\right)$，F_1，F_2 分别为 E 的左、右焦点，离心率 $e=\frac{1}{2}$．

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程；

(3)过点 F_2 且斜率为 k_1 的直线 l_1 交椭圆 E 于 M，N 两点，记直线 AM，AN 的斜率分别为 k_2，k_3，是否存在常数 λ，使得 $k_2+k_3-\lambda k_1$ 为定值?若存在，求出 λ 及该定值；若不存在，请说明理由．

4．（2026 南京市中华学校 1 月月考）已知双曲线$\Gamma: x^2-\frac{y^2}{3}=1$，点$A(1,0)$，点$Q(1,2)$，过点$Q$作动直线$l$与双曲线右支交于不同的两点$B,C$，点$H$在线段$BC$上，且与端点$B$，$C$不重合.

(1)求双曲线Γ的离心率；

(2)当H为BC中点时，$\triangle AQH$的面积为 7，求直线l的斜率；

(3)设直线AB、AH、AC分别与y轴交于点D、E、F，若E为DF的中点，证明：点H在一条定直线上，并求出该定直线的方程.

5.　(2026 届广州市零模)

已知椭圆Γ$:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A$，下顶点为$B$，长轴长为 4，且过点$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求Γ的方程;

(2)点P为椭圆Γ在第一象限上任一点，直线AP交y轴于点C，直线BP交x轴于点D.

(i) 若四条直线AP，BP，AB，CD的斜率分别记为k_1，k_2，k_3，k_4，证明：$k_1k_2=k_3k_4$;

(ii) 记$\triangle PCD$的面积为S_1，四边形$ABDC$的面积为S_2，求$\frac{S_1}{S_2}$的最大值.